Нехай точка *M(x,y,z)* довільна точка площини, її радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється так, що весь час $Пр_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = \left|OT\right| = p$. Ця умова має місце лише для точок площини; воно не виконується, якщо точка *M* не лежить на площині. Отже, маємо властивість точок площини, яку запишемо у векторній формі: $Пр_{\vec{e}}\overrightarrow{OM} = \vec{r} \cdot \vec{e} = p$ (5.1)

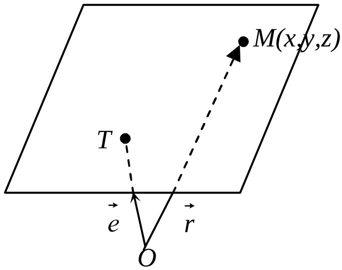


Рис. 5.1

Рівняння (5.1) висловлює умову, за якої точка *M* лежить на даній площині, і має назву нормального рівняння площини. Воно записано у векторній формі. Вектор $\vec{r}$ має координати *x, y, z*. Вектор $\vec{e}$ своїми проекціями має косинуси кутів *α, β, γ*, які він утворює з координатними вісями *Ox*, *Oy* та *Oz*. Тобто, $\vec{r} = (x; y; z)$ і $\vec{e} = (cos\,\alpha; cos\,\beta; cos\,\gamma)$.

Скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{e}$ дає нормальне рівняння площини у координатній формі:

$$x\,cos\,\alpha + y\,cos\,\beta + z\,cos\,\gamma - p = 0\,. \qquad (5.2)$$

Рівняння (5.2) - першого степеня відносно *x, y, z*, тобто всяка площина може бути подана рівнянням першого порядку відносно поточних координат.

Зведення загального рівняння площини до нормального виду (5.2). Вище було доведено, що будь-яка площина може бути подана рівнянням першого порядку. Доведемо зворотне: будь-яке рівняння першого порядку (степеня) між трьома змінними визначає площину.

Візьмемо рівняння першого степеня загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5.3)$$

де $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Розглядатимемо A, B і C як проекції на вісі координат Ox, Oy і Oz деякого вектора $\vec{N}$, а x. y, z як проекції радіус-вектора $\vec{r}$ точки M. Тоді рівняння (5.3) має вигляд

$$\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0, \tag{5.4}$$

яке зводиться до (5.1), якщо останнє розділити на $|\vec{N}|$. Тобто, матимемо: $\vec{e} = \vec{N} / |\vec{N}|$ і $p = -D / |\vec{N}|$, де $|\vec{N}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

Таким чином, рівняння (5.4) завжди може бути зведено через рівняння (5.1) до нормального вигляду (5.2). Але нормальне рівняння (5.2) завжди визначає площину. Отже, рівняння (5.4), відповідно, і початкове рівняння (5.3), визначає площину, що й треба було довести.

З попереднього маємо спосіб перетворення загального рівняння (5.3) площини до рівняння (5.2) площини у нормальній формі: щоб привести загальне рівняння (5.3) першого степеня до нормального вигляду треба помножити його на:

$$M = \pm 1 / \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \pm 1 / |\vec{N}|, \tag{5.5}$$

де знак множника належить брати протилежним знаку вільного члена D. Цей множник має назву нормуючого множника.

Після множення на M рівняння (5.3) матиме вигляд:

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0$$

і співпадає з (5.2), якщо:

$$MA = \cos\alpha; \quad MB = \cos\beta; \quad MC = \cos\gamma; \quad MD = -p.$$

Звідси маємо формули для обчислення напрямних косинусів і числа p:

$$\cos\alpha = A / |\vec{N}|; \ \cos\beta = B / |\vec{N}|; \ \cos\gamma = C / |\vec{N}|; \ -p = D / |\vec{N}| \tag{5.6}$$

З останнього маємо: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. (5.7)

Приклад. Рівняння площини $x - 2y + 2z = 3$ перетворити до нормального вигляду.

Розв'язок. Обчислимо нормуючий множник

$$M = +1 / \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 1 / \sqrt{9} = 1/3.$$

Помножимо на нього дане рівняння. Маємо:

$$(1/3)x \times (-2/3)y + (2/3)z - 1 = 0.$$

Для даної площини: $\cos\alpha = 1/3$; $\cos\beta = -2/3$; $\cos\gamma = 2/3$; $p = 1$.

Дослідження загального рівняння площини. Подивимось, які часткові положення відносно системи координат $Oxyz$ займає площина

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

якщо деякі коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

а) $D = 0$. $Ax + By + Cz = 0$ - площина, яка проходить через початок координат;

б) $A = 0$, або $B = 0$, або $C = 0$. Тобто коефіцієнт біля однієї з змінних дорівнює нулю. Наприклад, $A = 0$. $By + Cz + D = 0$. Це площина, яка паралельна вісі Ox. У другому і третьому випадках маємо площини, які паралельні вісям *Oy і Oz* відповідно;

в) $D = 0$; $A = 0$, або $B = 0$, або $C = 0$. Тобто, коефіцієнти біля однієї з змінних та вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$ і $D = 0$. $By + Cz = 0$. Це площина, яка містить вісь Ox. У другому і третьому випадках маємо площини, які містять вісі Oy і Oz відповідно;

г) коефіцієнти біля двох змінних дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$ і $B = 0$. Маємо $Cz + D = 0$. Це рівняння площини, яка паралельна координатній площині xOy. Якщо $A = 0$ і $C = 0$, або $B = 0$ і $C = 0$ будемо мати площини, які паралельні координатним площинам xOz і yOz відповідно;

д) коефіцієнти біля двох змінних і вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, $A = 0$, $B = 0$ і $D = 0$. Маємо $Cz = 0$. $C \neq 0$, тоді $z = 0$ - рівняння координатної площини yOx. Якщо $A = 0$, $C = 0$ і $D = 0$ або $B = 0$, $C = 0$ і $D = 0$, матимемо відповідно рівняння координатних площин xOz і yOz.

<u>Рівняння площини у відрізках.</u> Розглянемо площину $Ax + By + Cz + D = 0$, яка перетинає всі три координатні вісі. З попереднього відомо, що у цьому випадку жоден з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Позначимо через a, b і c довжини відрізків, які відсікає площина на вісях координат (рис.5.2).

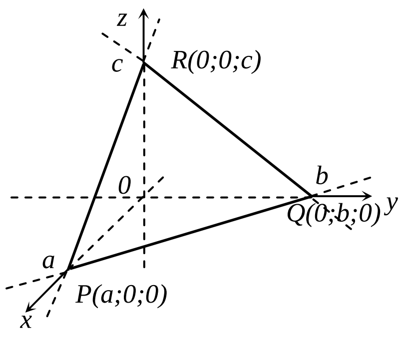


Рис. 5.2

Оскільки точка $P(a; 0; 0)$ лежить на площині, то її координати задовольняють рівнянню площини $A \cdot a + D = 0$, або $A = -D/a$. Аналогічно координати точки $Q(0;b;0)$ задовольняють рівнянню площини, тобто $B \cdot b + D = 0$, або $B = -D/b$. Нарешті, координати точки $R(0; 0; c)$ задовольняють рівнянню площини, тобто $C\,c + D = 0$, або $C = -D/c$.

Запишемо обчислені коефіцієнти у загальне рівняння площини:

$$-(D/a)x - (D/b)y - (D/c)z + D = 0.$$

Скоротивши це рівняння на $-D \neq 0$, знайдемо:

$$x/a + y/b + z/c - 1 = 0, \text{ або } x/a + y/b + z/c = 1. \qquad (5.8)$$

Останнє рівняння має назву рівняння площини у відрізках.

Приклад. Рівняння площини $3x - 4y + z - 5 = 0$ записати у відрізках.

Розв'язання. Нехай $y = 0$ і $z = 0$. Тоді: $3x - 5 = 0$, або $x = 5/3$; тобто $a = 5/3$. Аналогічно, покладемо $x = z = 0$, знайдемо величину b: $-4y - 5 = 0$, звідси $y = -5/4$; тобто $b = -5/4$. Нарешті, покладемо $x = 0$ і $y = 0$, маємо $z - 5 = 0$, відкіля $z = 5$; тобто $c = 5$.

Шукане рівняння матиме вигляд: $x/(5/3) + y/(-5/4) + z/5 = 1$.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку. Нехай треба знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$. Візьмемо шукане рівняння у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Шукана площина проходить через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, тому координати цієї точки повинні задовольняти цьому рівнянню. Тобто маємо умову:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Віднімемо цю тотожність з попереднього рівняння, маємо шукане рівняння:

$$A(x - x_1) + B \cdot (y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (5.9)$$

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки. Нехай маємо три точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$. З попереднього розділу відомо, що рівняння площини, яка проходить через дану точку M_1, має вигляд (5.9). Щоб знайти рівняння шуканої площини, необхідно припустити, щоб рівняння (5.9) задовольнялось координатами двох інших точок:

$$\left.\begin{aligned} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

Об'єднавши (5.9) і (5.10) у систему трьох рівнянь а трьома невідомими A, B і C, бачимо, що це однорідна система. З теорії рішення таких систем відомо, що вона має ненульове рішення, якщо її визначник дорівнює нулю. Тобто,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \quad (5.11)$$

Розкривши визначник по елементах першого рядка, маємо шукане рівняння.

Приклад. Скласти рівняння площини, яке проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;0)$ і $M_3(3;0;1)$.

Розв'язок. Запишемо визначник (5.11) з відомими координатами точок:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 0-3 \\ 3-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix}=0.$$

Звідси: $(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$;

$$(x-1)(4-6)-(y-2)(4+6)+(z-3)(4+4)=0;$$

$$-2x+2-10y+20+8z-24=0.$$

Після скорочення на -2 шукане рівняння матиме вигляд:

$$x+5y-4z+1=0.$$

Кут між двома площинами. Маємо рівняння двох площин:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кутом між двома площинами будемо називати один з двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площинами (якщо вони паралельні, то кут беремо рівним 0 або π). Позначимо вибраний кут через φ. Кожна з площин має нормальний вектор, це: $\vec{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Кут між площинами є той же кут φ між векторами $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$, які перпендикулярні до відповідної площини. Таким чином, згадавши скалярний добуток векторів, маємо:

$$\cos\varphi=(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)/(\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}). \quad (5.12)$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \quad (5.13)$$

Останнє можливо коли $\varphi=\pi/2$, тому що $\cos(\pi/2)=0$.

Умова паралельності двох площин:

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2 \quad (5.14)$$

має місце коли $\vec{N}_1=\lambda\vec{N}_2$. Тобто, якщо $\lambda\neq 0$, то

$A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ і $C_1 = \lambda C_2$. Звідси маємо (5.14).

Приклад. Знайти косинус кута між площинами:

$$x + y - z = 1 \text{ і } 2x+y-2z+3 = 0.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (5.12):

$$\cos\varphi = (1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2)/(\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}) =$$
$$= 5/(\sqrt{3}\sqrt{9}) = 5/(3\sqrt{3}) = (5\sqrt{3})/9 .$$

Точка перетину трьох площин. Щоб знайти координати точки перетину трьох площин, які дані своїми рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3 &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

треба розв'язати ці рівняння разом відносно x, y і z, тому що координати точки перетину повинні одночасно задовольняти всім трьом рівнянням площин. Методи її розв’язування з прикладами розглянуті вище.

Взаємне розташування трьох площин у просторі. Три площини можуть перетинатись; дві площини можуть бути паралельні (або співпадати), а третя площина їх перетинає; три площини можуть бути паралельні (або співпадати).

Відстань від точки до площини. Нехай рівняння площини зведено до нормального виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ і точка $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ не належить до цієї площини (рис. 5.3). Треба знайти відстань d точки M від даної площини δ, тобто узяти з належним знаком довжину перпендикуляра MK, де $K \in \delta$.

Проведемо через початок координат вісь ℓ перпендикулярно до площини і встановимо на ній додатний напрям від O до T ($T \in \delta$). Розглянемо ламану $OPNMKTO$ і знайдемо її проекцію на вісь ℓ. Вісь ℓ має напрям, який співпадає з напрямом нормального вектора до даної площини, тобто $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Кожна частина ламаної має відповідну проекцію на вісь ℓ:

$Пр_\ell OP = x_1\cos\alpha$; $Пр_\ell PN = y_1\cos\beta$; $Пр_\ell NM = z_1\cos\gamma$;

$Пр_\ell MK = -d$; $Пр_\ell KT = 0$; $Пр_\ell TO = -p$, тому що вісь ℓ утворює кути α, β і γ, з координатними вісями Ox, Oy і Oz відповідно. Оскільки ламана замкнена, то її проекція на будь-яку вісь дорівнює нулю.

Маємо: $$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - d - p = 0 . \qquad (5.16)$$

Таким чином, щоб знайти відстань точки від площини, треба загальне рівняння площини привести до нормального вигляду а потім замість поточних координат підставити значення координат даної точки. Від знайденого числа треба взяти абсолютну величину.

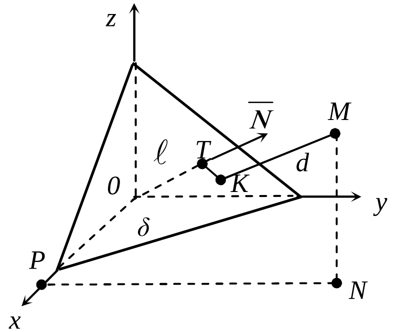


Рис. 5.3

Приклад. Знайти відстань від точки $N(1;\ 2;\ 3)$ до площини

$$2x - 2y + z = 3.$$

Рішення. Обчислимо нормуючий множник:

$$M = 1/\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 1/\sqrt{9} = 1/3 .$$

Запишемо рівняння площини у нормальній формі:

$(2/3)x - (2/3)y + (1/3)z - 1 = 0.$

Обчислимо відстань:

$$d = |2/3 \cdot 1 - 2/3 \cdot 2 + 1/3 \cdot 3 - 1| = |-2/3| = 2/3 .$$

Під знаком модуля маємо від'ємну величину. Це означає, що точка N і початок координат лежать по один бік від даної площини.

ЛЕКЦІЯ № 20

Пряма лінія у просторі. Рівняння прямої. Положення прямої лінії у просторі буде цілком визначеним, якщо задамо на прямій визначену точку $M_0(a;b;c)$ за допомогою її радіуса-вектора $\vec{r}$ і вектора $\vec{S}$, $|\vec{S}| \neq 0$, якому пряма паралельна (рис. 5.4).

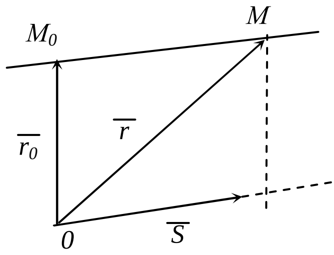


Рис. 5.4

Нехай точка *M(x;y;z)* поточна точка прямої. Вона має радіус-вектор $\vec{r}$. За правилом паралелограма маємо:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} .$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний вектору $\vec{S}$, то: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S} \cdot t$, де $t \in R$. Отже, маємо векторне рівняння прямої:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{S}t \; . \qquad (5.17)$$

Перепишемо це рівняння у координатній формі. Для цього запишемо вектори у координатах:

$$\vec{r} = (x;y;z); \;\; \vec{r_0} = (a;b;c); \;\; \vec{S} = (m;n;p).$$

Рівність (5.17) має місце, якщо:

$$x = a + mt; \;\; y = b + nt; \;\; z = c + pt . \qquad (5.18)$$

Тобто, коли *t* змінюється, точка *M(x;y;z)* рухається по даній прямій. Рівняння (5.18) має назву параметричних рівнянь прямої лінії.

Якщо з рівнянь (5.18) вилучити параметр *t*, матимемо канонічні рівняння прямої лінії:

$$(x-a)/m = (y-b)/n = (z-c)/p . \qquad (5.19)$$

Подивимось, чи можна визначити $cos\alpha$, $cos\beta$ і $cos\gamma$, коли відомі *m, n* і *p*. Очевидно, маємо: $\vec{S} = \vec{e}\,|\vec{S}|$,

де $\vec{e} = (cos\alpha; cos\beta; cos\gamma)$. Перепишемо останню рівність у проекціях:

$$m = cos\alpha\,|\vec{S}|, \;\; n = cos\beta\,|\vec{S}|, \;\; p = cos\gamma\,|\vec{S}|, \qquad (5.20)$$

тобто *m, n* і *p* пропорційні напрямним косинусам прямої лінії, причому множником пропорційності є довжина вектора $|\vec{S}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$.

Таким чином, з рівностей (5.20), маємо:

$$\cos\alpha = m/|\vec{S}|;\ \cos\beta = n/|\vec{S}|;\ \cos\gamma = p/|\vec{S}|. \qquad (5.21)$$

Рівність нулю однієї з проекцій вектора $\vec{S}$ означає перпендикулярність прямої до відповідної вісі. Наприклад, $m = 0$. Пряма перпендикулярна вісі Ox.

Пряма як лінія перетину двох площин. Загальні рівняння прямої. Нехай у канонічних рівняннях прямої (5.19) коефіцієнт $p \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині xOy. Запишемо ці рівняння окремо:

$$(x-a)/m = (z-c)/p;\quad (y-b)/n = (z-c)/p. \qquad (5.22)$$

Кожне з цих рівнянь визначає площину, притому перша паралельна вісі Oy, а друга - вісі Ox.

Таким чином, визначаючи пряму лінію рівняннями вигляду (5.22), розглядаємо її як перетин двох площин, що проектують цю пряму на координатні площини xOz і yOz. Аналогічні вирази можемо зробити, коли $m \neq 0$, або $n \neq 0$.

Але визначити пряму зовсім не обов'язково саме такою парою площин тому, що через кожну пряму проходить безліч площин. Будь-які дві з них, що перетинаються, визначають її у просторі. Отже, рівняння будь-яких двох таких площин, розглянутих сумісно, визначають рівняння цієї прямої.

Взагалі будь-які дві не паралельні між собою площини з загальними рівняннями

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.23)$$

визначають пряму їх перетину.

Рівняння (5.23), які розглядають сумісно, звуть загальними рівняннями прямої.

Від загальних рівнянь прямої (5.23) можна перейти до її канонічних рівнянь (5.19). Для цього треба мати будь-яку точку на прямій та її напрямний вектор.

Приклад. Привести до канонічного вигляду рівняння прямої:

$$\{2x - 3y + z - 5 = 0,\quad 3x - y - 2z - 4 = 0\}.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Знайдемо точку на прямій. Нехай, наприклад, $z = 1$. Тоді

$$\{2x - 3y - 4 = 0,\quad 3x + y - 6 = 0\}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, маємо: $x = 2,\ y = 0$. таким чином, знайшли точку $(2; 0; 1)$.

Обчисливши векторний добуток нормальних векторів $\overrightarrow{N_1}=(2;-3;1)$ і $\overrightarrow{N_1}=(3;1;-2)$, даних площин, матимемо напрямний вектор $\vec{S}$ прямої:

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=5\vec{i}+7\vec{j}+11\vec{k}.$$

Таким чином, канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$(x-2)/5=y/7=(z-1)/11.$$

Другий спосіб. Розглянемо систему

$$\left.\begin{aligned}2x-3y+\ \ z-5=0,\\ 3x+\ \ y-2z-4=0.\end{aligned}\right\}$$

Тут два рівняння і три змінні. Перепишемо систему таким чином:

$$\left.\begin{aligned}2x-3y=-z+5,\\ 3x+\ \ y=2z+4.\end{aligned}\right\}\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11\neq 0$$

Розв'яжемо її відносно x і y. Маємо:

$$x=(5z+17)/11;\quad y=(7z-7)/11.$$

Кожне з цих рівнянь розв'яжемо відносно z;

$z=(11x-17)/5;\ z=(11y+7)/7$. Звідси

$(x-17/11)/5=(y+7/11)/7=z/11$. Це канонічні рівняння тієї ж самої прямої, але з іншою точкою.

Кут між двома прямими. Кутом між прямими у просторі будемо називати будь-який з кутів, утворених двома прямими, які проведено через довільну точку паралельно даним. При цьому домовимось брати кут у межі від O до π, якщо нема додаткових вказівок. Нехай маємо канонічні рівняння двох прямих ліній:

$$(x-a_1)/m_1=(y-b_1)/n_1=(z-c_1)/p_1;$$

$$(x-a_2)/m_2=(y-b_2)/n_2=(z-c_2)/p_2.$$

Очевидно, що за кут φ між ними можна взяти кут між їх напрямними векторами $\overrightarrow{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\overrightarrow{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$, або кут, який додає його до π. За формулами з векторної алгебри маємо:

$$\cos\varphi=(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)/(\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}). \qquad (5.24)$$

У формулі (5.24) можна брати як "+" так і "–", що відповідає вибору одного з двох різних кутів між даними прямими.

Приклад. Знайти кут між прямими

$$(x-1)/1 = y/(-4) = (z+3)/1 \text{ і } x/2 = (y+2)/(-2) = z/(-1).$$

Розв'язання. Запишемо напрямні вектори:

$$\vec{S}_1 = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{S}_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Підставимо відповідні значення проекцій цих векторів у рівняння (5.24), маємо:

$$\cos\varphi = (1\cdot 2 + (-4)\cdot(-2) + 1\cdot(-1)) / \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} /$$
$$\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 9/\sqrt{18}/\sqrt{9} = \pm\sqrt{2}/2.$$

Звідки $\varphi = \pi/4$ або $\varphi = 3\pi/4$.

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Оскільки напрям прямої визначається напрямним вектором $\vec{S} = (m; n; p)$, а дві прямі паралельні, то їх напрямні вектори пропорційні. Тобто, $\vec{S_1} = k\vec{S_2}$. Звідси маємо умову їх паралельності:

$$m_1/m_2 = n_1/n_2 = p_1/p_2. \tag{5.25}$$

У випадку перпендикулярності двох прямих $\cos\varphi = 0$. З формули (5.24) маємо умову їх перпендикулярності:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{5.26}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки. Нехай треба знайти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, ,z_1)$ і $M_2(x_2, y_2 ,z_2)$. Будемо шукати ці рівняння у канонічній формі.

Для рішення задачі достатньо знати координати однієї з точок, яка лежить на цій прямій, і напрямний вектор. За таку точку можна взяти будь-яку з двох даних. Візьмемо, наприклад, $M_1(x_1, y_1, ,z_1)$. За напрямний вектор прямої приймемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Проекціями його на координатні вісі будуть: $(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$ і $(z_2 - z_1)$.

Шукані рівняння прямої матимуть вигляд:

$$(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1) = (z - z_1)/(z_2 - z_1). \tag{5.27}$$

Приклад. Скласти рівняння прямої лінії, яка проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$ і $M_2(2, -1, 1)$.

Розв'язання. Скористуємося рівняннями (5.27):

$$(x-1)/(2-1) = (y-2)/(-1-2) = (z+1)/(1+1) \text{ або}$$

$$(x-1)/1 = (y-2)/(-3) = (z+1)/2.$$

Кут між прямою та площиною. Умови їх паралельності і перпендикулярності. Нехай є рівняння прямої лінії $(x-a)/m=(y-b)/n=(z-c)/p$ і рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

Кутом φ між прямою та площиною будемо називати будь-який з двох суміжних кутів, утворених прямою і її проекцією на площину. Знайдемо синус кута φ. Вважаємо, що $\varphi \leq \pi/2$, оскільки синуси суміжних кутів рівні. Кут $(\pi/2-\varphi)$ буде, як видно з рис.5.5, кутом між вектором $\vec{S}$ прямої (a) і перпендикуляром $\vec{N}$ до площини (α).

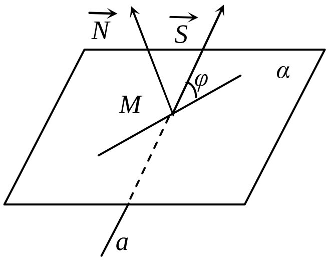


Рис. 5.5

Його косинус знайдемо через коефіцієнти A, B, C нормального вектора $\vec{N}$ площини і коефіцієнти m, n і p напрямного вектора $\vec{S}$ прямої. Зауважимо, що $cos(\pi/2-\varphi)=sin\,\varphi$, маємо:

$$sin\varphi = |Am+Bn+Cp|/(\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}). \qquad (5.28)$$

Чисельник дробу має абсолютне значення тому, що $sin\varphi \geq 0$. Умова паралельності прямої і площини $sin\varphi = 0$:

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (5.29)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини маємо з рівняння $\vec{N}=k\vec{S}$:

$$A/m = B/n = C/p. \qquad (5.30)$$

Приклад. Знайти кут між площиною $x - y + z - 1 = 0$ і прямою $(x-1)/(-1) = (y+1)/1 = z/1$.

Розв'язок. Скористаємося формулою (5.28):

$$sin\varphi = |1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot 1|/(\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}) =$$

$$= 1/(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}) = 1/3; \quad \varphi \approx 19{,}5^0.$$

Точка перетину прямої і площини. Нехай маємо рівняння прямої лінії у канонічній формі і рівняння площини у загальній формі. Треба знайти координати точки їх перетину. Припустимо, що пряма не належить до площини, або вони не паралельні.

Переведемо канонічні рівняння прямої до рівнянь прямої у параметричній формі (5.18): $x = a + mt$; $y = b + nt$; $z = c + pt$.

Підставимо ці вирази у рівняння площини замість поточних координат, маємо: $A(a + mt) + B(b + nt) + C(c + pt) + D = 0$.

Звідки: $t = (Aa + Bb + Cc + D)/(Am + Bn + Cp)$. (5.31)

Якщо занести обчислене значення t у рівняння (5.18), матимемо координати шуканої точки перетину прямої та площини. Рівняння (5.31) дає умови належності прямої до площини:

$Am + Bn + Cp = 0$ і $Aa + Bb + Cc + D = 0$. (5.32)

Приклад. Знайти точку перетину прямої $(x-2)/2 = (y-2)/1 = (z-3)/(-2)$ і площини $x + 2y - z - 3 = 0$.

Розв'язання. $(x-2)/2 = (y-2)/1 = (z-3)/(-2) = t$;

$$x - 2 = 2t; \quad y - 2 = t; \quad z - 3 = -2t.$$

Параметричні рівняння прямої:

$$x = 2t + 2; \quad y = t + 2; \quad z = -2t + 3.$$

Обчислимо параметр t:

$$1 \cdot (2t + 2) + 2 \cdot (t + 2) - (-2t + 3) - 3 = 0.$$

$$6t + 6 - 6 = 0; \quad t = 0.$$

Шукана точка має координати:

$$x = 2; y = 2; z = 3.$$

ТЕМА 6. *ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ*

ЛЕКЦІЯ № 21

Невизначений інтеграл. Раніше ми розглядали таку задачу: дано функцію $F(x)$; треба знайти її похідну, тобто функцію $f(x) = F'(x)$. Тепер будемо розглядати обернену задачу: дана функція $f(x)$; треба знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$; тобто $F'(x) = f(x)$.

Визначення. Функція $F(x)$ зветься первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо в усіх точках цього відрізку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Знайти первісну для функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. З визначення первісної прямує, що функція $F(x) = 1/3x^3$ є первісна, тому що $(1/3x^3)' = x^2$. Але і $F(x) = 1/3x^2 + C$ теж є первісна, де C - стала величина. З цього приводу маємо теорему.

Теорема. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ - дві первісні для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то різниця між ними дорівнює сталій величині.

Доведення. За визначенням первісної, маємо

$$F_1(x) = f(x) \text{ і } F_2(x) = f(x)$$

для будь-якого $x \in [a,b]$. Позначимо $F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$.

Візьмемо похідну від обох частин

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \varphi'(x) \text{ або } f(x) - f(x) = \varphi'(x) \text{ або } \varphi'(x) = 0,$$

при будь-якому значенні $x \in [a,b]$. Але з останньої тотожності прямує, що $\varphi(x) = C$ (стала величина).

Визначення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ звуть невизначеним інтегралом і позначають символом $\int f(x)dx$. Таким чином: $\int f(x)dx = F(x) + C$. (6.1)

При цьому функцію $f(x)$ звуть підінтегральною функцією, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, $\int$ - знаком інтеграла.

Знаходження множини всіх первісних функцій для $f(x)$ є інтегруванням цієї функції.

З (6.1) прямує:

- похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$.
- диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
- невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Таблиця інтегралів. На основі таблиці похідних від елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

- $\int u^{\alpha} du = u^{\alpha+1} / (\alpha + 1) + C, \quad \alpha \neq -1$;
- $\int du / u = ln|u| + C$;
- $\int a^u du = a^u / lna + C$;
- $\int e^u du = e^u + C$;
- $\int sinudu = -cosu + C$;
- $\int cosudu = sinu + C$;

- $\int du/(a^2+u^2) = 1/a\, arctg(u/a) + C$;
- $\int du/(a^2-u^2) = 1/(2a) ln|(u+a)/(u-a)| + C$;
- $\int du/(\sqrt{a^2-u^2}) = arcsin(u/a) + C$;
- $\int du/(\sqrt{u^2 \pm a^2}) = ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$;
- $\int du/cos^2 u = tgu + C$;
- $\int du/sin^2 u = -ctgu + C$;
- $\int du/sin u = ln|tg(u/2)| + C$;
- $\int du/cos u = ln|tg(u/2 + \pi/4)| + C$;
- $\int shudu = chu + C$;
- $\int chudu = shu + C$;
- $\int du/ch^2 u = thu + C$;
- $\int du/sh^2 u = -cthu + C$.

Відзначимо, що в таблиці буква *u* може позначати як незалежну змінну, так і неперервну диференційовану функцію $u = \varphi(x)$.

Властивості невизначеного інтеграла:

- невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох (і будь-якого скінченого числа) функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів: $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

- сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

- якщо функція *F(x)* є первісною функції *f(x)*, то:

$$\int f(ax+b)dx = 1/aF(ax+b) + C.$$

Усі ці рівності доводяться диференціюванням.

Інтегрування за допомогою таблиці.

Приклад. $\int (2x^3 - 3\sin 3x + 5\sqrt{x})dx = 2\int x^3 dx - 3\int \sin 3x dx +$

$+5\int x^{1/2} dx = 2/4x^4 + (3\cos 3x)/3 + 5x^{3/2}/(3/2) + C =$

$$= x^4 / 2 + \cos 3x + 10x^{3/2} / 3 + C.$$

Приклад. $\int (1/(x+3) + \cos 7x + \sin(2x - 6))dx =$

$$= \int dx/(x+3) + \int \cos 7x dx + \int \sin(2x - 6)dx =$$

$$= \ln|x+3| + 1/7 \sin 7x - 1/2 \cos(2x - 6) + C.$$

Інтегрування методом заміни змінної. Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію. Тоді $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Тут маємо на увазі, що після інтегрування у правій частині рівності замість t буде підставлено його вираз через x: $t = \varphi^{-1}(x)$. Цей метод грунтується на властивості інваріантності диференціала, тобто $\int f(x)dx = \int g(t)dt$, звівши тим самим обчислення даного інтеграла до обчислення інтеграла $\int g(t)dt$. Якщо цей інтеграл обчислено: $\int g(t)dt = G(t) + C$, то, повернувшись до вихідної змінної x, дістанемо

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Приклад. $\int (a^2 - x^2)^{-3/2} dx$.

Розв'язання. Нехай $x = a \sin t$; тоді $dx = a \cos t\, dt$.

$$\int (a^2 - x^2)^{-3/2} dx = \int (a^2 - a^2 \sin^2 t)^{-3/2} a \cos t dt =$$

$$= \int (a^3 \cos^2 t |\cos t|)^{-1} a \cos t dt = 1/a^2 \int dt / \cos^2 t = 1/a^2 tg t + C,$$

якщо $\cos t > 0$. Повернемось до змінної x: $t = \arcsin(x/a)$, тоді

$$tg t = \sin t / \cos t = \sin(\arcsin(x/a)) / \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x/a))} = x / \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким чином, $\int (a^2 - x^2)^{-3/2} dx = x / (a^2 \sqrt{a^2 - x^2}) + C$.

Приклад. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Зробимо підстановку $t = \sin x$; тоді $dt = \cos x\, dx$ і, отже,

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = 2/3 t^{3/2} + C = 2/3 \sin^{3/2} x + C.$$

Приклад. $\int \ln^3 x dx / x$.

Зробимо підстановку $t = \ln x$; тоді $dt = dx/x$, отже

$$\int \ln^3 x dx / x = \int t^3 dt = 1/4 t^4 + C = 1/4 \ln^4 x + C.$$

<u>Інтеграли від функцій, які мають квадратний многочлен</u>.

<u>Розглянемо інтеграл</u>: $I_1 = \int dx/(ax^2 + bx + c)$.

Перетворимо многочлен, який стоїть у знаменнику, до суми або різниці квадратів: $ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 + (c - b^2/(4a)) =$ $= a((x + b/2a)^2 \pm k^2$, де $\pm k^2 = c/a - b^2/(4a^2)$. Знак "+" або "–" береться залежно від знака виразу, який записано праворуч.

Отже: $I_1 = \int dx/(ax^2 + bx + c) = 1/a \int dx/((x + b/2a)^2 \pm k^2)$.

Зробимо заміну змінної $x + b/2a = t$; $dx = dt$ і

$I_1 = 1/a \int dt/(t^2 \pm k^2)$. Це табличні інтеграли.

<u>Приклад.</u> $\int dx/(x^2 + 4x + 8)$.

<u>Розв'язання.</u> $\int dx/(x^2 + 4x + 8) = \int dx/(x^2 + 4x + 4 + 4) =$

$$= \int dx/((x^2 + 2)^2 + 2^2).$$

Робимо заміну змінної $x + 2 = t$, $dx = dt$. Маємо

$$\int dt/(t^2 + 2^2) = (1/2) arctg(t/2) + C.$$

Повернувшись до змінної x, остаточно знаходимо

$$\int dx/(x^2 + 4x + 8) = (1/2) arctg((x + 2)/2) + C.$$

<u>Розглянемо інтеграл</u>: $I_2 = \int (Ax + B) dx/(ax^2 + bx + c)$.

Зробимо тотожні перетворення в чисельнику:

$$I_2 = \int (A(2ax + b)/(2a) + (B - Ab/(2a)) dx/(ax^2 + bx + c).$$

Останній інтеграл перепишемо у вигляді двох інтегралів. Сталі множники винесемо за знак інтегралів, матимемо:

$$I_2 = A/(2a) \int (2ax + b) dx/(ax^2 + bx + c) +$$

$$+ (B - Ab/(2a)) \int dx/(ax^2 + bx + c).$$

Другий інтеграл є інтеграл I_1, який розглянуто вище. У першому інтегралі зробимо заміну змінної:

$ax^2 + bx + c = t$; $(2ax + b) dx = dt$. Отже,

$$\int (2ax + b) dx/(ax^2 + bx + c) = \int dt/t = ln|t| + C = ln|ax^2 + bx + c| + C.$$

Остаточно: $I_2 = A/(2a) ln|ax^2 + bx + c| + (B - Ab/(2a)) I_1$.

<u>Приклад.</u> $\int (x + 3) dx/(x^2 - 2x - 3)$.

<u>Розв'язання.</u> За вказаним методом: $\int (x + 3) dx/(x^2 - 2x - 3) =$

$$=\int(1/2(2x-2)+(3+1/2\cdot 2))dx/(x^2-2x-3)=$$

$$=1/2\int(2x-2)dx/(x^2-2x-3)+4\int dx/(x^2-2x-3)=$$

$$=1/2\ln|x^2-2x-3|+4\int dx/((x-1)^2-4)=1/2\ln|x^2-2x-3|+$$

$$+\ln|(x-3)/(x+1)|+C\ .$$

Розглянемо інтеграл: $I_3=\int dx/\sqrt{ax^2+bx+c}$.

За допомогою перетворень квадратного тричлена, розглянутих вище, цей інтеграл зводиться, в залежності від знаку a, до табличних інтегралів вигляду:

$\int dt/\sqrt{t^2\pm k^2}$, коли $a>0$; $\int dt/\sqrt{k^2-t^2}$, коли $a<0$.

Розглянемо інтеграл: $I_4=\int(Ax+B)dx/\sqrt{ax^2+bx+c}$.

За допомогою перетворень квадратного тричлена, розглянутих вище, даний інтеграл дорівнює сумі двох інтегралів:

$$\int(Ax+B)dx/\sqrt{ax^2+bx+c}=A/(2a)\int(2ax+b)dx/\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+(B-Ab/(2a))\int dx/\sqrt{ax^2+bx+c}\ .$$

Застосувавши до першого інтеграла підстановку $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx=dt$, маємо

$$\int(2ax+b)dx/\sqrt{ax^2+bx+c}=\int dt/\sqrt{t}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C\ .$$

Другий інтеграл типу I_3 розглянуто вище.

Приклад. $\int(5x+3)dx/\sqrt{x^2+4x+10}$.

Розв'язання. $\int(5x+3)dx/\sqrt{x^2+4x+10}=$

$$=\int(5/2(2x+4)+(3-10))dx/\sqrt{x^2+4x+10}=$$

$$=5/2\int(2x+4)dx/\sqrt{x^2+4x+10}-7\int dx/\sqrt{(x+2)^2+6}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C\ .$$

ЛЕКЦІЯ № 22

Метод інтегрування частинами. Нехай $u(x)$ і $\upsilon(x)$ - дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій: $d(u\upsilon) = \upsilon du + ud\upsilon$,

а тепер проінтегруємо: $\int d(u\upsilon) = \int \upsilon du + \int ud\upsilon$, але $\int d(u\upsilon) = u\upsilon + C$.

Маємо формулу інтегрування частинами: $\int ud\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon du$.

<u>Приклад.</u> $\int x\cos xdx$.

<u>Розв'язання.</u> Тут: $x = u$; $cosxdx = d\upsilon$; $\upsilon = \int \cos xdx = \sin x$.

Отже, $\int x\cos dx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$.

Іноді цей метод необхідно застосовувати декілька разів.

<u>Приклад.</u> $\int x^2 \sin xdx$.

<u>Розв'язання.</u> Тут: $u = x^2$; $d\upsilon = \sin xdx$; $du = 2xdx$, $\upsilon = -\cos x$.

Інтегруємо частинами: $\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2\int x\cos xdx$.

Застосувавши до інтеграла, який стоїть праворуч, іще раз формулу інтегрування частинами, остаточно дістанемо:

$$\int x^2 \sin xdx = -x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Деякі інтеграли, які обчислюють методом інтегрування частинами:

$\int x^{\alpha} ln^m xdx$, $\int x^k \sin bxdx$, $\int x^k \cos bxdx$, $\int e^{\alpha x} \cos bxdx$,

$\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int e^{\alpha x} \sin bxdx$,

де *k*, *m* - натуральні; *a*, *b* - будь-які дійсні числа.

<u>Інтегрування раціональних алгебраїчних дробів.</u>

<u>Алгебраїчний дріб:</u> відношення двох многочленів, які не мають спільних коренів.

Якщо степінь чисельника нижче степені знаменника, то дріб зветься правильною, якщо навпаки - дріб неправильна.

Будь-який неправильний раціональний алгебраїчний дріб $P(x)/Q(x)$ можна зобразити у вигляді

$$P(x)/Q(x) = G(x) + R(x)/Q(x),$$

де $R(x)/Q(x)$ - правильний дріб, а $G(x)$ - многочлен, який звуть цілою частиною раціонального алгебраїчного дробу.

Ця операція має назву вилучення цілої частини неправильного алгебраїчного дробу.

<u>Приклад.</u> Раціональний алгебраїчний дріб $x^3/(x+1)$ може бути записаний у вигляді цілої частини і правильного алгебраїчного дробу:

$$x^3/(x+1) = (x^3 + 1 - 1)/(x+1) =$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)/(x+1)-1/(x+1)=$$
$$=x^2-x+1-1/(x+1).$$

<u>Корені многочлена.</u> Далі треба поновити набуте у школі вміння розкладати многочлен на множники. Якщо число c - корінь многочлена $P(x)$, то він ділиться на лінійний двочлен $x-c$, тобто

$P(x)=(x-c)Q(x)$, де $Q(x)$ - многочлен степеня $n-1$.

Основна теорема алгебри: будь-який многочлен n-го степеня має точно n - коренів.

Серед цих коренів можуть бути як дійсні так і комплексні числа. Якщо многочлен ділиться не тільки на лінійний двучлен $x-c$, а й на вищий степінь, тобто на многочлен вигляду $(x-c)^k$, де $k\in N$, то число c звуть коренем кратності k. Якщо $k=1$, то число c називається простим коренем многочлена.

Якщо комплексне число $c=\alpha+i\beta$ є коренем многочлена з дійсними коефіцієнтами, то й число $\overline{c}=\alpha-i\beta$, комплексно спряжене з числом c, буде коренем даного многочлена.

З властивості спряженості комплексних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами випливає, що коли він непарного степеня, то має хоча б один дійсний корінь.

Отже, будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами можна записати, і причому у єдиний спосіб (з точністю до порядку співмножників), у вигляді добутку свого старшого коефіцієнта, кількох лінійних многочленів вигляду $(x-c)$, які відповідають його дійсним кореням, і квадратних многочленів x^2+px+q, що відповідають парам спряжених комплексних коренів.

Многочлени типу $(x-c)$ і (x^2+px+q) звуть незвідними многочленами у множині дійсних чисел.

<u>Приклад.</u> Розкласти многочлен $P(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2$ на множники.

<u>Розв'язання.</u> За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1x_2x_3x_4x_5=2$. Перевіремо числа $\pm 1,\pm 2$. $P(1)=1^5-2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-3\cdot 1+2=$
$=1-2+2-3+2=0$

Отже, число $x=1$ є корінь.

$$P(-2)=(-2)^5-2(-2)^3+2(-2)^2-3(-2)+2=-32+16+8+6+2=0$$

Отже, число $x=-2$ є корінь. Розділимо $P(x)$ на добуток:

$$(x-1)(x+2)=x^2+x-2.$$

Маємо:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-\begin{array}{l} x^5-2x^3+2x^2-3x+2 \\ x^5+x^4-2x^3 \end{array}} & \underline{x^2+x-2} \\
\quad \underline{-\begin{array}{l} -x^4+2x^2-3x+2 \\ -x^4+x^3+2x^2 \end{array}} & x^3-x^2+x-1 \\
\qquad \underline{-\begin{array}{l} x^3-3x+2 \\ x^3+x^2-2x \end{array}} & \\
\qquad\quad \underline{-\begin{array}{l} -x^2-x+2 \\ -x^2-x+2 \end{array}} & \\
\qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

$P(x) = Q(x)S(x)$, де $S(x)=x^2+x-2$; $Q(x)=x^3-x^2+x-1$. Корені многочлена $Q(x)$ знаходимо аналогічно. $Q(1) = 1-1+1-1= 0$. Отже, число $x = 1$ є корінь і многочлен $Q(x)=x^3-x^2+x-1=$ $=(x-1)(x^2+1)$. Остаточно, $P(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+1)$.

<u>Найпростіші раціональні дроби. Визначення.</u> Правильні раціональні дроби вигляду:

а) $A/(x-a)$, б) $A/(x-a)^k$, $(k \geq 2)$,

в) $(Ax+B)/(x^2+px+q)$, $(p^2/4-q<0)$,

г) $(Ax+B)/(x^2+px+q)^k$, $(k \geq 2,\ p^2/4-q<0)$

мають назву найпростіших.

<u>Розкладання раціонального дробу на найпростіші</u> <u>за методом невизначених коефіцієнтів</u>. Розглянемо його на прикладі. Розкласти на суму найпростіших дробів правильний дріб $Q(x)/P(x)$, де

$$Q(x)=2x^4-10x^3+7x^2+4x+3;\quad P(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2.$$

<u>Розв'язання.</u> Многочлен $P(x)$ було розкладено на множники вище: $P(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+1)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$Q(x)/P(x)=A/(x+2)+B/(x-1)^2+C/(x-1)+(Dx+E)/(x^2+1),$$

де A, B, C, D і E невизначені коефіцієнти. Зводячи останню суму до спільного знаменника, з умови рівності дробів, дістаємо рівність:

$$Q(x)=A(x-1)^2(x^2+1)+$$

$$+B(x+2)(x^2+1)+C(x+2)(x-1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+2)(x-1)^2.$$

Два многочлени вважають рівними, якщо рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях змінної *x*.

Зрівнявши коефіцієнти многочлена, який стоїть праворуч, з коефіцієнтами многочлена, які стоять ліворуч, при однакових степенях невідомих останній рівності, дістанемо систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \mid \; 2 = A + C + D; \\ x^3 \mid \; -10 = -2A + B + C + E; \\ x^2 \mid \; 7 = 2A + 2B - C - 3D; \\ x^1 \mid \; 4 = -2A + B + C + 2D - 3E; \\ x^0 \mid \; 3 = A + 2B - 2C + 2E. \end{array}\right\}$$

Ця система має єдиний розв'язок. Знаходимо його методом алгебраїчного додавання. Маємо: $A = 3$, $B = 1$, $C = -2$, $D = 1$, $E = -3$. Отже, шуканий розклад має вигляд: ·

$$Q(x)/P(x) = 3/(x+2) + 1/(x-1)^2 + 2/(x-1) + (x-3)/(x^2+1).$$

<u>Інтегрування раціональних дробів</u>. Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів:

$\int Adx/(x-a) = A\ln|x-a| + C;$

$\int Adx/(x-a)^k = A\int (x-a)^{-k}dx = A(x-a)^{-k+1}/(-k+1) + C;$ тут $k \ge 2$;

$\int (Ax+B)dx/(x^2+px+q) = (A/2)\ln|x^2+px+q| +$

$+(2B-Ap)/(4q-p^2)arctg((2x+p)/\sqrt{4q-p^2}) + C$. Останній інтеграл розглянуто у попередньому розділі.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу: $\int Q(x)dx/P(x)$. Якщо дріб неправильний, то його представимо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів. З попереднього відомо, що тип найпростіших дробів визначається коренями знаменника .

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграл від раціонального дробу, який вище розклали на найпростіші:

$$\int (2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3)dx/(x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2) = 3\int \frac{dx}{x+2} +$$

$$+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{x-3}{x^2+1}dx=3ln(x+2)-1/(x-1)+2ln(x-1)+$$

$$+\frac{1}{2}ln(x^2+1)-3arctgx+C\ .$$

Розглянутий приклад охоплює три види найпростіших дробів; випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені, розглядати не будемо.

Отже, інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченому вигляді.

ЛЕКЦІЯ № 23

Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Не від усякої ірраціональної функції інтеграл має вираз через елементарні функції. Тут розглянемо ті ірраціональні функції, інтеграли від яких за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

Розглянемо інтеграл $\int R(x,x^{m/n},...,x^{r/s})dx$, де R - раціональна функція вказаних аргументів. Нехай k - загальний знаменник дробів *m/n, ... ,r/s.* Зробимо підстановку: $x=t^k$, $dx=kt^{k-1}dt$. Тоді кожний дрібний степінь x матиме вираз через цілу степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться у раціональну функцію від t. Після інтегрування за змінною t повертаємось до змінної x: $t=\sqrt[k]{x}$.

Приклад. $\int x^{1/2}dx/(x^{3/4}+1)$.

Загальний знаменник дробів *1/2* і *3/4* є *4*. Робимо підстановку $x=t^4$; $dx=4t^3dt$. $\int x^{1/2}dx/(x^{3/4}+1)=$

$$=4\int(t^2t^3dt)/(t^3+1)=4\int t^5dt/(t^3+1)=$$

$$=4\int(t^2-t^2/(t^3+1))dt=4\int t^2dt-4\int t^2dt/(t^3+1)=$$

$$=4t^3/3-4/3ln|t^3+1|+C=4/3(x^{3/4}-ln|x^{3/4}+1|)+C\ .$$

Розглянемо інтеграл

$$\int R(x,((ax+b)/(cx+d))^{m/n},...,((ax+b)/(cx+d))^{r/s})dx\ .$$

Інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки: $(ax+b)/(cx+d)=t^k$, де k - загальний знаменник дробів *m/n, ..., r/s.* Після інтегрування за змінною t повертаємось до змінної x.

Приклад. $\int (x+3)^{1/2} dx / (x + 2(x+3)^{1/2})$.

Робимо заміну: $x+3=t^2$; $x=t^2-3$; $dx=2tdt$.

$$\int (x+3)^{1/2} dx/(x+2(x+3)^{1/2}) = \int t2tdt/(t^2-3+2t) =$$

$$= \int 2t^2 dt/(t^2+2t-3) = 2\int dt - \int (4t-6)dt/((t-1)(t+3)) =$$

$$= 2t + 1/2\int dt/(t-1) - 9/2\int dt/(t+3) =$$

$$= 2t + 1/2 ln|t-1| - 9/2 ln|t+3| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+3} + 1/2 ln|\sqrt{x+3}-1| - 9/2 ln|\sqrt{x+3}+3| + C.$$

Розглянемо інтеграл $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, де $a \neq 0$.

Цей інтеграл може бути перетворено до інтеграла від раціональної функції за допомогою тригонометричних підстановок. Інтеграли від тригонометричних функцій розглянуті нижче.

Перетворимо $ax^2+bx+c = a(x+b/(2a))^2 + (c-b^2/(4a))$. Зробимо заміну змінної, поклавши: $x + b/(2a) = t$; $dx = dt$. Тоді: $ax^2+bx+c = at^2 + (c-b^2/(4a))$. Розглянемо можливі випадки:

1) $a>0$, $c-b^2/(4a)>0$. Позначимо $a=m^2$, $c-b^2/(4a)=n^2$.

Тоді $ax^2+bx+c=m^2t^2+n^2$;

2) $a>0$, $c-b^2/(4a)<0$. Позначимо $a=m^2$, $c-b^2/(4a)=-n^2$. Тоді $ax^2+bx+c=m^2t^2-n^2$;

3) $a<0$, $c-b^2/(4a)>0$. Позначимо $a=-m^2$, $c-b^2/(4a)=n^2$. Тоді $ax^2+bx+c=n^2-m^2t$.

Отже, $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ перетворюється до одного з інтегралів:

$$\int R(t, \sqrt{m^2t^2+n^2})dt; \int R(t, \sqrt{m^2t^2-n^2})dt; \int R(t, \sqrt{n^2-m^2t^2})dt.$$

Очевидно, що перший інтеграл зводиться до інтеграла від тригонометричних функцій за допомогою підстановки $t = n/m\,tgu$. Другий – $t = n/(m\cos u)$ або $t = n/(m\sin u)$, третій – $t = n/m\sin u$.

Приклад. $\int dx/(a^2-x^2)^{3/2}$. Це інтеграл третього типу.

Робимо заміну: $x = a\sin u$; $dx = a\cos udu = \int dx/(a^2-x^2)^{3/2} =$

$$= a\int \cos udu/(a^2-a^2\sin^2 u)^{3/2} \quad a\int \cos udu/(a^3\cos^3 u) = 1/a^2\int du/(\cos^2 u) =$$

$$1/a^2 tgu + C = 1/a^2 \sin u/\cos u + C = 1/a^2 \sin u/(1-\sin^2 u)^{1/2} + C$$

$$= x/(a^2\sqrt{a^2-x^2}) + C.$$

Тут $u = arcsin(x/a)$. Відомо, $sin(arcsin\alpha) = \alpha$.

<u>Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій</u>. Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$. Покажемо, що цей інтеграл за допомогою «універсальної» підстановки *tg(x/2) = t* завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = 2tg(x/2)/(1+tg^2(x/2)) = 2t/(1+t^2);$$

$$\cos x = (1-tg^2(x/2))/(1+tg^2(x/2)) = (1-t^2)/(1+t^2) \text{ і } x = 2arctgt,$$

тобто $dx = 2dt/(1+t^2)$.

Отже, *sinx, cosx* і *dx* мають раціональні вирази відносно *t.*

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R(2t/(1+t^2),(1-t^2)/(1+t^2))2dt/(1+t^2).$$

<u>Приклад.</u> $\int dx/\sin x$.

$$\int dx/\sin x = \int (2dt/(1+t^2))/(2t/(1+t^2)) = \int dt/t =$$

$$= ln|t| + C = ln|tg(x/2)| + C.$$

Поряд з "універсальною" підстановкою є і інші підстановки, які у деяких випадках дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до цілі:

$\int R(\sin x)\cos x dx$, підстановка $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt$;

$\int R(\cos x)\sin x dx$ підстановка *cosx = t, –sinxdx = dt* зводить цей інтеграл до $-\int R(t)dt$;

$\int R(tgx)dx$, підстановка *tgx = t, x = arctgt, dx =* $dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt/(1+t^2)$;

$\int R(\sin^{2k} x,\cos^{2k} x)dx$, $(k \in N)$ підстановка *tgx = t,* зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt$ тому що $dx = dt/(1+t^2)$,

$$\sin^2 x = tg^2 x/(1+tg^2 x) = t^2/(1+t^2), \quad \cos^2 x = 1/(1+tg^2 x) = 1/(1+t^2).$$

Розглянемо: $\int \sin^m x\cos^n x dx$, де m і n - цілі числа. Тут можливі таки випадки: <u>*n* або *m* непарне</u>, але обидва – додатні. Нехай $n = 2p+1$, тоді $\int sin^m x\, cos^{2p+1} xdx = \int sin^m x\, cos^{2p} x\, cos\, xdx =$

$\int sin^m x(1 - sin^2 x)^p\, cos\, xdx$.

Зробимо заміну: $sinx = t$, $cosxdx = dt$. Отже, маємо інтеграл від раціональної функції $\int sin^m x\, cos^n xdx = \int t^m (1 - t^2)^p dt$.

<u>m і n парні додатні числа</u>. Використаємо формули зниження степені тригонометричних функцій: $sin^2 x = (1 - cos2x)/2$, $cos^2 x = (1 + cos2x)/2$. Отже, $\int sin^m x\, cos^n xdx =$ $= 2^{-p-q}\int (1 - cos2x)^p (1 + cos2x)^q dx$, де $m = 2p$ і $n = 2q$. Після піднесення до степеней p, q і множення многочленів, матимо $cos2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як указано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами пониження степені. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $coskx$, які легко інтегруються;

<u>m і n парні, але одне з чисел від'ємне</u>. Робимо заміну $tgx = t$, або $ctgx = t$ і отримаємо інтеграл відносно змінної t.

<u>Розглянемо</u>: $\int cos\, mx\, cos\, nxdx$, $\int sin\, mx\, cos\, nxdx$, $\int sin\, mx\, sin\, nxdx$.

Тут треба скористатися формулами заміни добутка на суму (різницю) тригонометричних функцій:

$$cos\, mx\, cos\, nx = (cos(m+n)x + cos(m-n)x)/2 ,$$

$$sin\, mx\, cos\, nx = (sin(m+n)x + sin(m-n)x)/2 ,$$

$$sin\, mx\, sin\, nx = (cos(m-n)x - cos(m+n)x)/2 .$$

Нижче розглянуті відповідні приклади.

<u>Приклад.</u> $\int sin^3 xdx/(1 + cos\, x) = \int sin^2 x\, sin\, xdx/(1 + cos\, x) =$

$$= \int (1 - cos^2 x) sin\, xdx/(1 + cos\, x) = \int (1 - cos\, x) sin\, xdx =$$

$$= \int (t-1)dt = t^2/2 - t + C = (cos^2 x)/2 - cos\, x + C .$$

Зроблено заміну: $cosx = t$, $-sinxdx = dt$.

<u>Приклад</u>. $\int dx/(2 - sin^2 x) = \int dt/(1+t^2)(2 - t^2/(1+t^2)) =$

$= \int dt/(2+t^2) = 1/\sqrt{2} arctg(t/\sqrt{2}) + C = 1/\sqrt{2} arctg((tgx)/\sqrt{2}) + C$.

Зроблено заміну: $tgx = t$; $dx = dt/(1+t^2)$.

<u>Приклад</u>. $\int cos^3 xdx/sin^4 x = \int cos^2 x\, cos\, xdx/sin^4 x =$

$$= \int (1 - sin^2 x) cos\, xdx/sin^4 x = \int (1 - t^2)dt/t^4 = \int dt/t^4 - \int dt/t^2 =$$

$$= -1/(3t^3) + 1/t + C = -1/(3\sin^3 x) + 1/\sin x + C\ .$$

Зроблено заміну: $sinx = t;\ \ cosxdx = dt.$

Приклад. $\int \sin^4 xdx = 1/4\int (1-\cos 2x)^2 dx =$

$$= 1/4\int (1-2\cos 2x + \cos^2 2x)dx = \int 1/4(x - \sin 2x) + 1/8\int (1+\cos 4x)dx) =$$

$$= 1/4(3/2x - \sin 2x + 1/8 \sin 4x) + C\ .$$

Тут зроблено подвоєння аргументу.

Приклад. $\int \sin^2 xdx/\cos^6 x = \int \sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 dx/\cos^6 x =$

$$= \int tg^2 x(1+tg^2 x)^2 dx = \int t^2 (1+t^2)^2 dt/(1+t^2) =$$

$$= \int t^2 (1+t^2)dt = t^3/3 + t^5/5 + C = 1/3tg^3 x + 1/5tg^5 x + C.$$

Зроблено заміну: $tgx = t;\ \ dx = dt/(1+t^2).$

Приклад. $\int \sin 5x \sin 3xdx = 1/2\int (\cos 2x - \cos 8x)dx =$

$$= 1/4 \sin 2x - 1/16 \sin 8x + C.$$

Скористались формулою заміни добутку на різницю тригонометричних функцій.

Зауваження. Не кожна первісна, навіть тоді, коли вона існує, має вираз через елементарні функції у скінченому вигляді. Наприклад: $\int exp(-x^2)dx$ - інтеграл Пуассона; $\int dx/\ln x$ – інтегральний логарифм; $\int \cos xdx/x$ - інтегральний косинус; $\int \sin xdx/x$ - інтегральний синус та інші.

ЛЕКЦІЯ № 24

Визначений інтеграл. Могутнім засобом досліджень у математиці, фізиці, механіці та інших дисциплінах є визначений інтеграл - одне з головних понять математичного аналізу. За допомогою визначеного інтеграла обчислюються площини, які обмежені кривими; довжини дуг; об'єми тіл; робота; швидкість; довжина шляху; моменти інерції і ін.

Обчислення площі криволінійної трапеції. Нехай на відрізку *[a;b]* задано неперервну функцію $y = f(x)$ (рис. 6.1). Позначимо через m і M її найменше і найбільше значення на цьому відрізку. Розіб'ємо відрізок *[a;b]* на n частин точками ділення $a = x_0$, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$, такими, що $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ і покладемо $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. Позначимо, далі, найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_1]$ через m_1 і M_1, на відрізку $[x_1, x_2]$ через m_2 і

$M_2,\ldots$, на відрізку $[x_{n-1}, x_n]$ через m_n і M_n.

Складемо суми: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$;

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i .$$

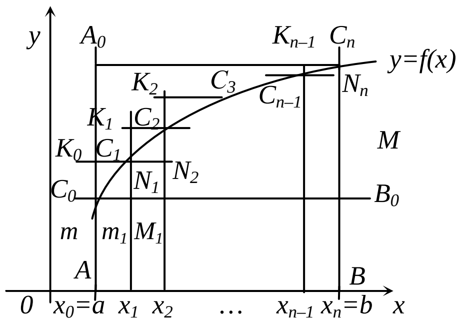


Рис. 6.1

Суму $\underline{S}_n$ звуть нижньою інтегральною сумою, а суму $\overline{S}_n$ - верхньою інтегральною сумою.

Якщо $f(x) \geq 0$, то нижня інтегральна сума чисельно дорівнює площині уписаної ступінчастої фігури $AC_0N_1C_1N_2\ldots C_{n-1}N_nBA$, обмеженої уписаною ламаною, верхня інтегральна сума чисельно дорівнює площині описуваної ступінчастої фігури $AK_0C_1K_1\ldots C_nBA$, обмеженої описуваною ламаною.

Відзначимо деякі властивості верхньої та нижньої інтегральних сум:

- оскільки $m_i \leq M_i$ для будь-якого $i = \overline{1,n}$, то $\underline{S}_n \leq \overline{S}_n$ (знак рівності можливий тільки в разі $f(x) = const.$);

- оскільки $m_1 \geq m,\ m_2 \geq m, \ldots, m_n \geq m$, де m - найменше значення $f(x)$ на $[a;b]$, то $\underline{S}_n \geq m(b-a)$;

- оскільки $M_1 \leq M,\ M_2 \leq M, \ldots, M_n \leq M$, де M - найбільше значення $f(x)$ на $[a;b]$, то $\overline{S}_n \leq M(b-a)$.

Об'єднавши ці нерівності, маємо: $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \overline{S}_n \leq M(b-a)$.

Якщо $f(x) \geq 0$, то остання нерівність має простий геометричний зміст. Так $m(b-a)$ і $M(b-a)$ відповідні площі уписаного і описуваного прямокутників AC_0B_0B і AA_0C_nB.

Продовжимо розгляд попереднього. У кожному з відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$, візьмемо точку, яку позначимо $\xi_1, \xi_2,...,\xi_n$ (рис. 6.2) і обчислимо значення функції $f(\xi_1)$, $f(\xi_2),...,f(\xi_n)$.

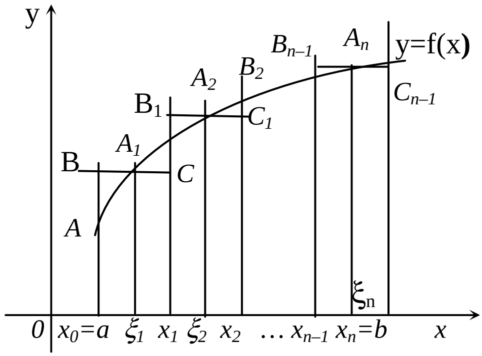


Рис. 6.2

Складемо суму :

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$

Ця сума зветься інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Оскільки при довільному ξ_i, яке належить відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, буде $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ і всі $\Delta x_i > 0$, то $m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i$.

Отже, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, або $\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$.

Геометричний зміст останньої нерівності при $f(x) \ge 0$ є у тому, що фігура, площа якої дорівнює S_n, обмежена ламаною, яка міститься між уписаною і описуваною ламаними.

Сума S_n залежить від того, як поділено відрізок $[a;b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$ і від того, як узято точку ξ_i у цьому відрізку.

Позначимо через Δx_i найбільшу з довжин відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,...,$[x_{n-1}, x_n]$. Розглянемо будь-яке ділення відрізка $[a,b]$ на відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, де $i = \overline{1,n}$, такі, що $max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у діленні прямує до нескінченності. Для кожного ділення, взявши відповідні значення ξ_i, можна скласти інтегральну суму

$$S_n^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ . \qquad (6.1)$$

Розглянемо деяку послідовність ділення відрізка $[a,b]$, у якій $max\,\Delta x_i \to 0$, при цьому $n \to \infty$ і у кожному діленні беремо відповідні ξ_i. Припустимо, що ця впорядкована послідовність інтегральних сум S_n^* прямує до деякої границі: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} S_n^* = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$.

<u>Визначений інтеграл.</u> Якщо при будь-яких діленнях відрізка $[a,b]$ таких, що $max\,\Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок ξ_i на відрізках $[x_{i-1},\ x_i]$ інтегральна сума (6.1) прямує до однієї і тієї ж границі S, то ця границя зветься <u>визначеним інтегралом</u> від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається: $\int\limits_a^b f(x)dx$. (6.2)

Таким чином: $S = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Числа a і b відповідно є нижня і верхня границі інтегралу, функція $f(x)$ є підінтегральною функцією, $f(x)dx$ - підінтегральним виразом, $[a,b]$ є відрізок інтегрування, x - зміна інтегрування.

Отже, якщо для функції $f(x)$ границя S існує, то функція є <u>інтегрованою</u> на відрізку $[a,b]$.

Зауважимо, що нижня і верхня інтегральні суми є окремі випадки інтегральної суми (6.1), тому, якщо $f(x)$ інтегрована, то нижня і верхня інтегральні суми прямують до тієї ж границі S, і тому можемо записати: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$; $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то у разі $f(x) \geq 0$ визначений інтеграл (6.2) буде чисельно дорівнювати площині криволінійної трапеції, обмеженої вказаною кривою, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox.

<u>Зауваження:</u>

- визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \ldots = \int\limits_a^b f(z)dz \ ;$$

- зміна місцями границь інтегрування змінює знак визначеного інтегралу на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

- якщо $a = b$ то для будь-якої функції $f(x)$ має місце

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

- безпосереднє обчислення визначеного інтеграла як границі інтегральної суми зв'язано з великими труднощами. Тому далі буде подано метод, відкритий Ньютоном і Лейбніцем, який використовує глибокий зв'язок, існуючий між інтегруванням і диференціюванням.

Основні властивості визначеного інтеграла:

- сталий множник можна виносити за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, \text{ де } A = const;$$

- визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій. Так, у разі двох функцій:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx;$$

- якщо на відрізку $[a,b]$, де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $f(x) \le \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

Доведення. Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} (\varphi(\xi_i) - f(\xi_i))\Delta x_i.$$

Тут кожна різниця $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \ge 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна уся сума і додатна її границя, тобто

$$\int_a^b (\varphi(x) - f(x))dx \ge 0, \text{ відкіля}$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0, \text{ або } \int_a^b \varphi(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx;$$

- якщо m і M - найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і $a < b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доведення. За умовою $m \le f(x) \le M$. Інтегруємо цю нерівність:

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \text{, але}$$

$$\int_a^b mdx = m(b-a), \quad \int_a^b Mdx = M(b-a).$$

Після підстановки цих рівностей у попередню нерівність маємо шукане;

- якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка ξ, що буде правильною рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Цю властивість визначеного інтегралу іноді подають як теорему про його середнє значення.

Доведення. Нехай $a < b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то на підставі властивості 4, маємо:

$$m \le 1/(b-a)\int_a^b f(x)dx \le M .$$

Звідси вираз, який розташовано всередині нерівності, буде дорівнювати μ. Тобто, $m \le \mu \le M$. Отже, при деякому значенні $\xi \in (a,b)$, будемо мати $\mu = f(\xi)$, або

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a);$$

- для будь-яких трьох чисел a,b і c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

якщо тільки усі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини.

ЛЕКЦІЯ № 25

Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Нехай у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ нижня границя a стала, а верхня границя b буде змінюватись. Тоді буде змінюватися і значення інтеграла, тобто інтеграл є функція верхньої границі:

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Якщо $f(t) \geq 0$, то $\Phi(x)$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції $aABx$ (рис. 6.3). Очевидно, що ця площа змінюється у залежності від зміни x.

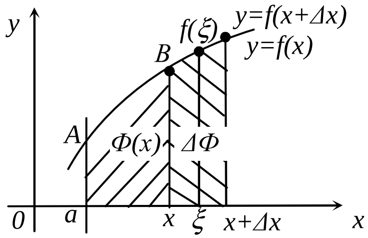


Рис. 6.3

Теорема. Похідна від $\Phi(x)$ по x дорівнює $f(x)$.

Доведення. Дамо аргументу x приріст Δx, тоді

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Приріст функції $\Phi(x)$ дорівнює: $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

До останнього інтегралу застосуємо теорему про його середнє значення: $\Delta\Phi=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$, де $x<\xi<x+\Delta x$.

Знайдемо відношення: $\Delta\Phi/\Delta x=f(\xi)\Delta x/\Delta x=f(\xi)$.

Отже, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)$. Але $\xi\to x$ коли $\Delta x\to 0$, тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервна. Таким чином, $\Phi'(x)=f(x)$.

Зауваження. З доведеної теореми прямує, що будь-яка неперервна функція має первісну.

Теорема. Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо *F(x)* є будь-яка первісна від неперервної функції *f(x),* то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.3}$$

Доведення. Нехай *F(x)* є деяка первісна від функції *f(x).* Вище доведено, що функція $\int_a^x f(t)dt$ є також первісною від *f(x).* Але дві первісні від однієї функції відрізняються на сталу величину *C*. Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C. \tag{6.4}$$

Ця рівність є тотожність при відповідному *C*. Визначимо *C*, поклавши у (6.4) *x = a,* тоді: $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, або $0 = F(a) + C$ відкіля $C = -F(a)$.

Отже, $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Поклавши *x = b,* маємо формулу Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Повернувшися до змінної *x* у останньому виразі, маємо (6.3).

Якщо ввести позначення: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формулу (6.3) можна переписати так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Вираз $\Big|_a^b$ є знаком подвійної підстановки.

Формула (6.3) дає практично зручний метод обчислення визначених інтегралів у тому разі, коли відома первісна підінтегральної функції.

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Теорема. Нехай дано визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де функція *f(x)* неперервна на відрізку *[a;b]*. Введемо нову змінну *t* за формулою $x = \varphi(t)$.

Якщо а) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; б) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$; в) $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (6.4)$$

Доведення. Якщо $F(x)$ є первісна для функції $f(x)$, то визначений інтеграл, який стоїть ліворуч у (6.4), дає:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,, \qquad (6.5)$$

а визначний інтеграл, який стоїть праворуч у (6.4), дає

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)\,. \quad (6.6)$$

З рівностей (6.5) і (6.6) прямує твердження (6.4) теореми.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтегралу за формулою (6.4) не треба повертатися до попередньої змінної.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної: $x = rsint$, $dx = rcostdt$. Обчислимо нові границі: $x = 0$, коли $t = 0$; $x = r$, коли $t = \pi/2$.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\, r\cos t dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \cos t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = r^2/2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = r^2/2(t + (\sin 2t)/2)\Big|_0^{\pi/2} = \pi r^2/4.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Нехай у визначеному інтегралі (6.2) підінтегральний вираз $f(x)dx$ можливо подати у вигляді $ud\upsilon$, де $u = u(x)$ і $\upsilon = \upsilon(x)$ - диференційовані функції від x. Тоді

$$(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u\,.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ud\upsilon = u\upsilon\Big|_a^b - \int_a^b \upsilon du\,. \qquad (6.7)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^e lnxdx$.

Розв'язання. Тут $u = lnx$; $\upsilon = x$.

$$\int_1^e lnxdx = xlnx\Big|_1^e - \int_1^e xdx/x = elne - 1ln1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1\,.$$

Геометричні застосування визначеного інтегралу. Обчислення площин:

- якщо на відрізку *[a,b]* функція *f(x)* ≥ 0, то, як відомо з попереднього, площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю *Ox* і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює $S = \int_a^b f(x)dx$;

- якщо $f(x) \leq 0$ на *[a,b]*, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ теж від'ємний. За абсолютною величиною він дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції;

- якщо *f(x)* скінчене число разів змінює знак на відрізку *[a,b]*, то треба знайти суму абсолютних значень інтегралів або обчислити інтеграл $S = \int_a^b | f(x) | dx$; (6.8)

Приклад. Обчислити площу S фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ і віссю *Ox*, коли $0 \leq x \leq 2\pi$.

Розв'язання. Оскільки $\sin x \geq 0$, коли $0 \leq x \leq \pi$, і $\sin x \leq 0$, коли $\pi \leq x \leq 2\pi$ (рис. 6.4), тому

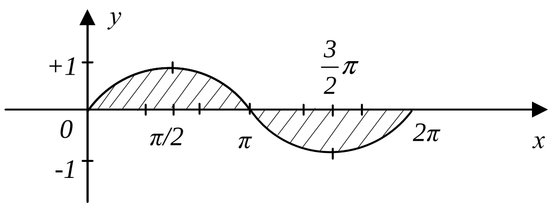


Рис. 6.4

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2(-\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -2(\cos\pi - \cos 0) = -2(-1-1) = 4 \text{ од.кв.}$$

Площу області, обмеженої кривими: $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$; та за умови $y = f_1(x) \geq y = f_2(x)$, коли $a \leq x \leq b$, обчислюємо за формулою:

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx\,. \qquad (6.9)$$

Інколи треба знаходити точки перетину кривих. Для цього розв'язуємо систему, яку складаємо з рівнянь кривих.

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$ і $y=x^2$ (рис. 6.5).

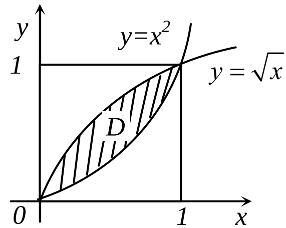


Рис. 6.5

Розв'язання. Знаходимо точки перетину кривих:

$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2. \end{cases}$ Звідси: $\sqrt{x}=x^2$; $x=x^4$; $x^4-x=0$; $x(x^3-1)=0$.

Отже, $x_1=0$ і $x_2=1$.

Підставимо визначені величини у (6.9), маємо:

$$S=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx=2/3x^{3/2}\Big|_0^1-1/3x^3\Big|_0^1=2/3-1/3=1/3 \text{ од}^2.$$

Площа криволінійної трапеції у випадках, коли крива має рівняння у параметричній формі: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де $\alpha\le t\le\beta$ і $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Ці рівняння визначають деяку функцію y = *f(x)* на відрізку *[a, b]* і, отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою (6.9). Зробимо заміну змінної у цьому інтегралі: $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$. Тоді $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$.

Отже, $S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$ (6.10)

Приклад. Обчислити площу області, обмеженої віссю *Ox і* одною аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Розв'язання. Тут $t \in [0,2\pi]$. За формулою (6.10) маємо

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\, dt\right) = a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} +\right.$$

$$\left. + 1/2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt = a^2\left(2\pi + 1/2t\Big|_0^{2\pi} + 1/4\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) = 3\pi a^2 \text{ од}^2.\right.$$

ЛЕКЦІЯ № 26

Площа криволінійного сектора у полярних координатах. Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = f(\theta)$, де $f(\theta)$ - неперервна функція, коли $\alpha \le \theta \le \beta$. Визначимо площу сектора *OAB*. обмеженого кривою $f(\theta)$ і радіус-векторами $\theta_0 = \alpha$ і $\theta_n = \beta$.

Розіб'ємо сектор *OAB* радіус-векторами $\alpha = \theta_0$, $\theta = \theta_1, \ldots,$ $\theta = \theta_{n-1}$, $\theta_n = \beta$ на *n*-частин. Позначимо через $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, …, $\Delta\theta_n$ кути між проведеними радіус-векторами (рис. 6.6).

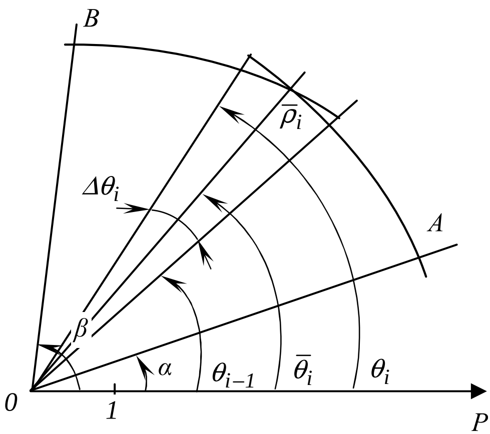


Рис. 6.7

Позначимо через ρ_i довжину радіус-вектора, який відповідає куту $\overline{\theta}_i$, де $\theta_{i-1} < \overline{\theta}_i < \theta_i$.

Розглянемо сектор кола з радіусом $\overline{\rho}_i$ і центральним кутом $\Delta\theta_i$. Його площа буде дорівнювати $\Delta S_i = 1/2\,\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i$.

Сума $S_n = 1/2\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i^2 \cdot \Delta\theta_i = 1/2\sum_{i=1}^{n}(f(\overline{\theta}_i))^2 \cdot \Delta\theta_i$ дає площу "ступінчатого" сектора.

Ця сума є інтегральною сумою для функції $\rho^2 = (f(\theta))^2$ на відрізку $[\alpha,\beta]$. Її границя, коли $max\,\Delta\theta_i \to 0$ і $n \to \infty$, є визначений інтеграл, який дає площу сектора *OAB*. Отже,

$$S = 1/2\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta \quad \text{або} \quad S = 1/2\int_{\alpha}^{\beta}(f(\theta))^2 d\theta. \qquad (6.11)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $\rho = a\sqrt{cos\,2\theta}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури (рис.6.8). Радіус-вектор описує область з площею, яка дорівнює чверті шуканої площі, якщо кут θ змінюється від 0 до $\pi/4$:

$$S/4 = 1/2\int_{0}^{\pi/4}\rho^2 d\theta = 1/2a^2\int_{0}^{\pi/4}cos\,2\theta d\theta = a^2/2(sin\,2\theta)/2\Big|_0^{\pi/4} = a^2/4.$$

Отже, $S = a^2$ од.^{2}

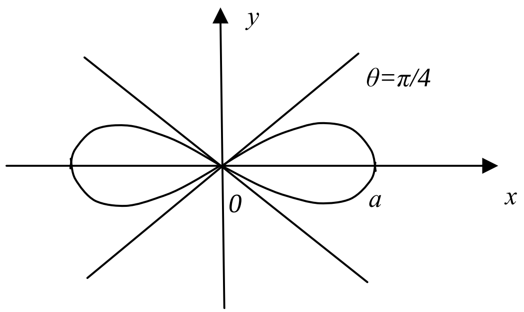


Рис. 6.8

Довжина дуги кривої. Довжина дуги гладкої кривої $y = f(x)$ у прямокутній системі координат. Вважаємо, що функція та її перша похідна неперервні на відрізку $[a,b]$.

Дуга $\breve{AB}$ розташована між лініями $x=a$ і $x=b$ (рис. 6.9).

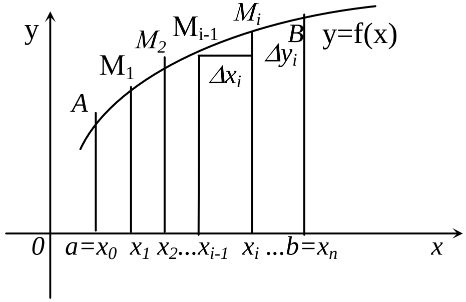


Рис. 6.9

Візьмемо на дузі AB точки $A, M_1, M_2, ..., B$ з абсцисами $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ і проведемо відрізки AM_1, $M_1 M_2, ..., M_{n-1}B$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. Тоді маємо ламану AM_1, $M_2, ..., M_{n-1}B$, уписану у дугу $\breve{AB}$. Довжина ламаної дорівнює $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Довжиною L дуги $\breve{AB}$ називають ту границю, до якої прямує довжина уписаної ламаної, коли довжина її найбільшого відрізка прямує до нуля, а число n цих відрізків прямує до нескінченності:

$$L = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{\max \Delta l_i \to 0, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Позначимо $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y_i / \Delta x_i)^2}\,\Delta x_i .$$

За теоремою Лагранжа маємо

$\Delta y_i / \Delta x_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)$, де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i$.

Таким чином, довжина уписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i .$$

За умовою, $f'(x)$ неперервна, отже, функція $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ теж неперервна. Тому існує границя написаної вище інтегральної суми, яка дорівнює визначеному інтегралу:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0, n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx .$$

Маємо формулу для обчислення довжини дуги:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad \text{або} \quad L = \int_a^b \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx . \qquad (6.12)$$

Приклад. Визначити довжину кола $x^2 + y^2 = r^2$.

Розв'язання. Обчислимо четверту частину кола, яка розташована у першому квадранті. Рівняння кола тут має вигляд $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, відкіля $dy/dx = -x/(r^2 - x^2)^{1/2}$.

Отже, $(1/4)L = \int_0^r (1+x^2/(r^2-x^2))^{1/2}\,dx = \int_0^r r/(r^2-x^2)^{1/2}\,dx =$

$$= r\arcsin(x/r)\Big|_0^r = r\arcsin 1 = r\pi/2 .$$

Довжина всього кола $L = 2\pi \cdot r$.

Довжина дуги кривої, яка має рівняння у параметричній формі: $x = \varphi(t);\ y = \psi(t);\ \ \alpha \le t \le \beta$. Вважаємо, що ці функції та їх похідні неперервні у області визначення, причому $\varphi'(t) \ne 0$. У цьому разі подані рівняння визначають деяку неперервну функцію y = *f(x)*, яка має неперервну похідну $dy/dx = \psi'(t)/\varphi'(t)$. Нехай $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тоді, зробивши у інтегралі (6.12) підстановку $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, маємо:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt . \qquad (6.13)$$

Приклад. Обчислити довжину астроїди: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Зробимо рисунок лінії (рис. 6.10 а). Обчислюємо *1/4* довжини, тому що крива симетрична відносно обох вісей координат.

Знаходимо $dx/dt = -3a\cos^2 t\sin t$, $dy/dt = 3a\sin^2 t\cos t$. Параметр *t* буде змінюватись від *0* до 2π . Отже,

$$(1/4)L = \int_0^{\pi/2} (9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t)^{1/2} \cdot dt =$$

$$= 3a \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t \sin^2 t)^{1/2} dt = 3a \int_0^{\pi/2} |\cos t \sin t| dt = 3/2a \ \sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 3a/2$$

Довжина астроїди $L = 4(3/2)a = 6a$.

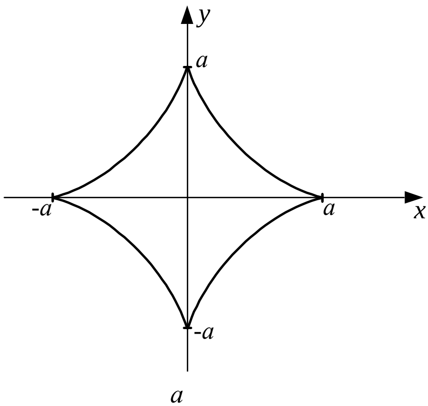
Довжина дуги кривої у полярній системі координат. У полярних координатах маємо рівняння кривої $\rho = f(\theta)$, де ρ - полярний радіус, θ - полярний кут. Запишемо формули переходу від полярної до прямокутної системи координат: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Якщо замість ρ підставимо його вираз через θ, маємо рівняння $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$. Ці рівняння можна розглядати як параметричні і для обчислення довжини дуги застосувати формули (6.13). Для цього знайдемо похідні від x і y за параметром θ:
$dx/d\theta = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta$, $dy/d\theta = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$.

Тоді $(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2 = (\rho')^2 + \rho^2$.

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\theta . \qquad (6.14)$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1+\cos\theta)$.

Розв'язання. Зробимо рисунок лінії (рис. 6.10 б). Лінія симетрична відносно вісі Ox. Змінюючи полярний кут θ від 0 до π, маємо половину шуканої довжини. Тут $\rho' = -a\sin\theta$. Отже,



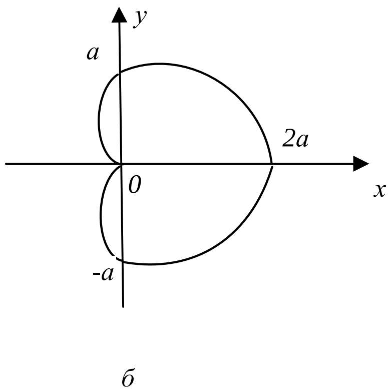


Рис. 6.10

$$L = 2\int_0^{\pi}(a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta)^{1/2}d\theta = 2a\int_0^{\pi}(2+2\cos\theta)^{1/2}d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos(\theta/2)d\theta = 8a\sin(\theta/2)\Big|_0^{\pi} = 8a\ .$$

ЛЕКЦІЯ № 27

Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло *T*. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до вісі *Ox* (рис. 6.11). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S = S(x)$.

Припустимо, що $S(x)$ є неперервна функція від x, і визначимо об'єм тіла *T*. Проведемо площини $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2, ..., x = x_n = b$. Ці площини розіб'ють тіло на шари. У кожному проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку ξ_i і для кожного значення $i = 1, 2, ..., n$ побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі *Ox*, а напрямна є контуром перерізу тіла *T* площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого елементарного циліндру з площею основи $S(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, і висотою Δx_i дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$. Об'єм усіх циліндрів буде $V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$.

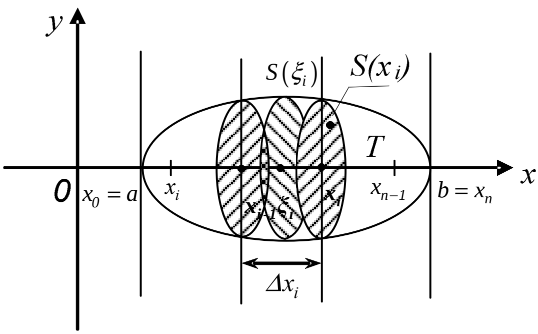


Рис. 6.11

Границя цієї суми (якщо вона існує), коли $max\,\Delta x_i \to 0$ і $n \to \infty$ називається об'ємом даного тіла:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max\,\Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i .$$

Об'єм V уявляє собою, очевидно, інтегральну суму для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, тому записана вище границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$V = \int_a^b S(x)dx . \tag{6.15}$$

<u>Приклад.</u> Обчислити об'єм фігури, якщо $S(x) = x^2$, де $a \le x \le b$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось формулою (6.15), дістанемо

$$V = \int_a^b x^2 dx = 1/3x^3\Big|_a^b = (b^3 - a^3)/3 \text{ од}^3.$$

<u>Об'єм тіла обертання</u>. Якщо тіло утворено обертанням кривої $f(x)$ навколо вісі Ox. Площа кола $S = \pi y^2 = \pi(f(x))^2$. Підставимо цей вираз у (15), маємо:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \tag{6.16}$$

<u>Приклад.</u> Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням лінії $y = ae^{x/(2a)}$ навколо вісі Ox, де $x \in [0;a]$.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось формулою (6.16), маємо

$$V = \pi\int_0^a (ae^{x/2a})^2 dx = \pi a^2\int_0^a e^{x/a}dx = \pi a^3 e^{x/a}\Big|_0^a = \pi a^3(e-1) \text{ од}^3.$$

<u>Обчислення площі поверхні тіла обертання.</u>

Нехай крива, яка задана на відрізку $[a,b]$ неперервною функцією $y = f(x) \ge 0$, обертається навколо вісі Ox. Перетнемо поверхню обертання двома площинами, які проходять через точки x та $x + dx$, паралельно Oyz. Замінимо утворену між перерізами фігуру зрізаним конусом, твірна якого дорівнює $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а радіуси основ дорівнюють $f(x)$ та $f(x+dx)$. Якщо висота конуса dx досить мала, то площа dS бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі:

$$dS = 2\pi\, f(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,. \qquad (6.17)$$

<u>Приклад.</u> Обчислити площу поверхні частини параболоїда, утвореного обертанням навколо вісі *Ох* параболи $y^2 = 2x$, $0 \le x \le 4$.

<u>Розв'язання.</u> Маємо $y = \sqrt{2x}$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$; $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\dfrac{1+2x}{2x}}$.

За формулою (6.17) знаходимо $S = 2\pi \int_0^4 \sqrt{2x}\sqrt{\dfrac{1+2x}{2x}}dx =$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{1+2x}\,dx = \frac{2}{3}p(1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{52p}{3} \text{ од.кв.}$$

<u>Фізичні застосування визначеного інтеграла</u>.

<u>Обчислення роботи.</u>

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота *А*, виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a; b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx\,. \qquad (6.18)$$

<u>Приклад.</u> Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб тіло маси *m* підняти з поверхні Землі вертикально вгору на висоту *h*, якщо радіус Землі дорівнює *R*.

<u>Розв'язання</u>. Згідно з законом Ньютона, сила *F* притягання тіла Землею дорівнює $F = \gamma \dfrac{mM}{x^2}$,

де *M* - маса Землі; γ - гравітаційна стала; *x* - відстань від центра тіла до центра Землі. Покладемо сталу $\gamma mM = k$, тоді $F(x) = kx^{-2}$, де $R \le x \le R + h$. При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла $P = mg$, тобто $\dfrac{k}{R^2} = P$,

звідки $k = PR^2$, $F(x) = PR^2x^{-2}$. За формулою (6.18) маємо

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2}dx = -PR^2x^{-1}\Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}\,.$$

<u>Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину.</u> Тиск *P* рідини на занурену горизонтальну пластину, визначається за законом Паскаля:

$$P = \gamma g h S\,, \qquad (6.19)$$

де S – площа пластини, h - глибина занурення, γ - густина рідини і g - прискорення вільного падіння.

Якщо в рідину пластину занурити не горизонтально , то її різні точки лежатимуть на різних глибинах і формулою (6.19) користуватись не можна. Проте, якщо пластина дуже мала, то всі її точки лежать на майже одній глибині занурення. Це дає змогу знайти диференціал тиску на елементарну площу пластини, а потім тиск на всю поверхню.

Приклад. Знайти тиск рідини на вертикально занурений в рідину півкруг, діаметр якого дорівнює $2R$ і знаходиться на поверхні рідини.

Розв'язання. Нехай елементарна площа знаходиться на глибині x (рис. 6.12).

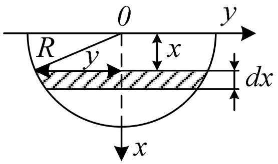


Рис. 6.12

Вважаючи її прямокутником з основою $2y$ і висотою dx, знайдемо за законом Паскаля диференціал тиску:

$$dP = \gamma g x 2y dx = 2\gamma g x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx\,.$$ Отже,

$$P = 2\gamma g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\gamma g(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3 g\gamma\,.$$

ЛЕКЦІЯ № 28

Невласні інтеграли. Визначений інтеграл було введено на скінченому проміжку від неперервної обмеженої функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтегралу стає неприйнятним. Наприклад, коли нескінченний проміжок інтегрування або n частинних відрізків скінченої довжини інтегральна функція необмежена.

Узагальнюючи поняття визначеного інтегралу на ці випадки, приходимо до невласного інтегралу – інтегралу від функції на необмеженому проміжку або від необмеженої інтегральної функції.

Невласні інтеграли першого роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{6.20}$$

її називають невласним інтегралом першого роду і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{6.21}$$

Таким чином, за означенням $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

У цьому випадку інтеграл (6.21) називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ - інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$.

Якщо ж границя (6.20) не існує або нескінченна, то інтеграл (6.21) називається також невласним, але розбіжним, а функція $f(x)$ - не інтегрованою на $[a;+\infty)$.

Аналогічно визначається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;b]$: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{6.22}$$

де c - довільне дійсне число. Отже, інтеграл ліворуч у формулі (6.22) існує або є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч.

З наведеного прямує, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтегралу із змінною межею інтегрування.

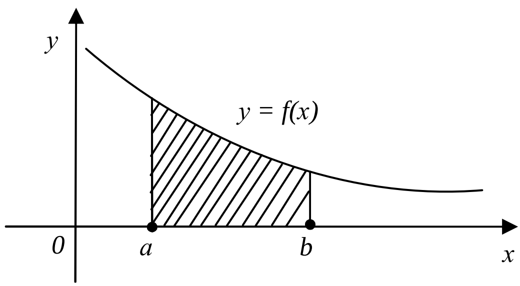


Рис. 6.13

Зауваження. Якщо функція *f(x)* неперервна і додатна на проміжку *[a; +∞)* і інтеграл (6.21) збігається, то природно вважати, що він відбиває площу необмеженої області (рис. 6.13).

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. За формулою (6.20) маємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} arctg\, x \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} (arctg b - arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\pi / 4$.

Якщо достатньо знати, збіжний чи ні невласний інтеграл, застосовують наступні ознаки збіжності:

Ознака 1. Якщо на проміжку $[a;+\infty)$ функції $f\ (x)$ і $g\ (x)$ неперервні і задовольняють умові $0 \le\ f\ (x)\ \le\ g\ (x),$ то із збіжності

інтегралу
$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \tag{6.23}$$

випливає збіжність інтегралу
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \tag{6.24}$$

а із розбіжності інтегралу (6.24) випливає розбіжність інтегралу (6.23).

Наведена ознака має простий геометричний зміст. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінчене число, то площа меншої області є також скінчене число; якщо площа меншої області нескінченно велика величина, то площа більшої області є також нескінченно велика величина.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^6+5}}\ ; \quad \int\limits_2^{+\infty} \frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}}dx .$$

Розв'язання. Оскільки для усіх $x \in\ [1;+\infty)$ $\quad 0 < \frac{x}{\sqrt{x^6+5}} < \frac{1}{x^2}$, а

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається (перевірте самостійно), то за ознакою 1 даний інтеграл також збігається.

Другий інтеграл розбігається, бо для усіх $x \in\ [2;+\infty)$, маємо:

$$\frac{2+\sin x+\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \quad \text{а} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$ є розбіжним (перевірте самостійно).

Ознака 2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \ 0 < k < +\infty, \ \left(f(x) > 0, g(x) > 0\right),$$

то обидва інтеграли (6.23) і (6.24) або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Ця ознака іноді виявляється зручнішою, ніж ознака 1, бо не потребує перевірки нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \ln((x^2+2)/(x^2+1))dx$.

Розв'язання. Оскільки $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ є збіжним і

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln((x^2+2)/(x^2+1))}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+1/(x^2+1)\right)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x^2+1)}{1/x^2} = 1,$$

то даний інтеграл також збігається.

В ознаках 1 і 2 розглядались невласні інтеграли від невід'ємних функцій. У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива така ознака.

Ознака 3. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (6.25)

збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_2^{+\infty} \frac{1+3\sin x}{x^3} dx$.

Розв'язання. Тут підінтегральна функція знакозмінна. Оскільки $\left|\frac{1+3\sin x}{x^3}\right| \le \frac{4}{x^3}$, а $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^3} dx$ є збіжним і дорівнює 2 (перевірте самостійно), то даний інтеграл теж збігається.

Слід зауважити, що із збіжності інтеграла (6.24) не випливає, взагалі кажучи, збіжність інтеграла (6.25). Ця обставина виправдовує такі означення.

Якщо разом з інтегралом (6.24) збігається й інтеграл (6.25), то інтеграл (6.24) називають абсолютно збіжним, а функцію $f(x)$ – абсолютно інтегровною на проміжку $[a;\ +\infty)$.

Якщо інтеграл (6.24) збігається, а інтеграл (6.25) розбігається, то інтеграл (6.24) називають умовно (або неабсолютно) збіжним.

Тепер ознаку 3 можна перефразувати так: абсолютно збіжний інтеграл збігається.

Отже, для знакозмінної функції викладені тут міркування дають змогу встановити лише абсолютну збіжність інтеграла. Якщо ж невласний інтеграл збігається умовно, то застосовують більш глибокі ознаки збіжності.

Приклад. Дослідити на збіжність $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{b^2+x^2}dx \quad (a;b \neq 0)$.

Розв'язання.

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{1}{b}\lim\limits_{a\to+\infty} arctg\frac{x}{b}\Big|_0^a = \frac{\pi}{2b}$, а $0 \le \left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right| \le \frac{1}{b^2+x^2}$,

то за ознакою 3 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{\sin ax}{b^2+x^2}\right|dx$ збігається .

Отже, збігається, причому абсолютно, і даний інтеграл, а функція $f(x) = \sin ax/(b^2+x^2)$ на проміжку $[0;\infty)$ є абсолютно інтегровною.

Невласні інтеграли другого роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою, якщо $f(x) \to\infty$ при $x \to b-0$ (рис. 6.14).

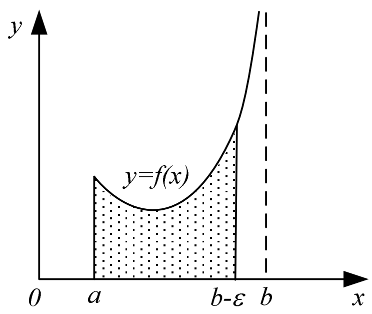


Рис. 6.14

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;\ b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b-\varepsilon > a$; тоді, якщо існує скінчена

границя
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \tag{6.26}$$
її називають невласним інтегралом другого роду і позначають так:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \tag{6.27}$$

У цьому випадку кажуть, що інтеграл (6.27) існує або збігається. Якщо ж границя (6.26) нескінченна або не існує, то інтеграл (6.27) також називають невласним інтегралом, але розбіжним.

Аналогічно якщо $x = a$ - особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,. \tag{6.28}$$

Якщо $f\ (x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c\in(a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$ за означенням покладають:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \tag{6.29}$$

Нарешті, якщо a та b - особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^d f(x)dx$ і $\int_d^b f(x)dx$ за означенням покладають
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx\,, \tag{6.30}$$
де d - довільна точка інтервалу $(a;\ b)$.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^2 dx/\sqrt{4-x^2}$.

Розв'язання. $\int_0^2 dx/\sqrt{4-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} dx/\sqrt{4-x^2} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin(x/2)\Big|_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin((2-\varepsilon)/2) = \frac{\pi}{2}\,.$$
Отже, інтеграл збіжний.

Зауваження. Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду аналогічні розглянутим вище.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 dx/(\sqrt{x}+5x^4)$.

Розв'язання. Даний інтеграл збігається, бо для усіх $x \in (0;1]$ маємо $0 < 1/(\sqrt{x}+5x^4) < 1/\sqrt{x}$, а інтеграл $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ є збіжним (перевірте самостійно).

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 dx/\sin x$.

Розв'язання. Функції: $f(x) = 1/\sin x$ та $g(x) = 1/x$ мають особливість у точці $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x/\sin x = 1$, і інтеграл $\int_0^1 dx/x$ розбігається, то даний інтеграл також розбігається.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Физматгиз, 1959. -432 с.
2. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. - М.: Физматгиз, 1961. - 300 с.
3. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Физматгиз, 1963. - 748 с.
4. Цубербиллер О.М. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. - М.: Физматгиз, 1966. - 336 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. Для ВТУЗОВ - М.: "Наука", 1973. - 720 с.
6. Російсько-український словник. – Київ: "Радянська школа", 1979. - 1012 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: "Наука", 1985. - 384 с.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1, ч.2: Учебное пособие для втузов. - М.: Наука, 1985. – С. 430, 560.
9. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. - Київ: "Вища школа", 1988. - 414 с.
10. Вища математика. Основні розділи. Книга 1. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1995. – 372 с.
11. Вища математика. Спеціальні розділи. Книга 2. За ред. проф. Г.Л.Кулініча. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.
12. Станішевський С.О. Посібник для розв’язання задач з вищої математики. – Харків: ХНАМГ, 2003. – 125 с.
13. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 270 с.
14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ: „Видавництво А.С.К.”, 2003. – 648 с.
15. Короткий російсько-український математичний словник. Печеніжський Ю.Є., Колосов А.І., Станішевський С.О. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 100 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

МОДУЛЬ 1

Напрям підготовки 6.060101

Автор: Степан Олександрович Станішевський

Редактор: *М.З. Аляб'єв*

План 2009, поз. 67Л

Підп. до друку 27.02.2009 р.
Папір офісний
Тираж 100 прим.
Замовл. №

Формат 60х84 1/16
Умовн.-друк. арк. 9,0
Друк на ризографі

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12